حساب الاحتمالات

تمرين1

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرة حمراء.
نسحب من الصندوق 4 كرات .
حدد في كل حالة
أ- عدد السحبات الممكنة ؟
ب- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء فقط ؟
ج- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأقل ؟
د- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأكثر ؟
1- تآنيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تآنيا

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = C_9^4 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$$

ب- نعتبر الحدث A :" الحصول على كرة سوداء فقط "

$$cardA = C_3^1 \times C_6^3 = 3\times20 = 60$$

ج- نعتبر الحدث B :" الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$$cardB = C_3^1\times C_6^3 + C_3^2\times C_6^2 + C_3^3\times C_6^1 = 3\times20 + 3\times15 + 6$$

$$cardB = 111$$

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = C_6^4 = 15$

$$cardB = 126 - 15 = 111$$

د- نعتبر الحدث C :" الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$cardC = C_3^1\times C_6^3 + C_6^4 = 60 + 15 = 75$$

2- بالتتابع بإحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = 9^4 = 6561$$

ب- نعتبر الحدث A :" الحصول على كرة سوداء فقط "

A : $C_4^1 nqqq$

$$cardA = 4\times3\times6^3$$

$$cardA = 2592$$

ج- نعتبر الحدث B :" الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$\overline{B}$:عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = 6^4 = 1296$

$$cardB = 1296 - 6561 = 5265$$

د- نعتبر الحدث C :" الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

A : $C_4^1 nqqq$ أو $qqqq$

$$cardC = 2592 + 1296 = 3888$$

3- بالتتابع بدون إحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = A_9^4 = 9\times8\times7\times6 = 3024$$

ب- نعتبر الحدث A :" الحصول على كرة سوداء فقط "

$A : C_4^1 nqqq$

$cardA = 4\times3\times A_6^3$

$cardA = 1440$

ج- نعتبر الحدث B :" الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = A_6^4 = 360$

$cardB = 3024 - 360 = 2664$

د- نعتبر الحدث C :" الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$A : C_4^1 nqqq$ أو $qqqq$

$cardC = 1440 + 360 = 1800$

تمرين2

من الأرقام : 2-3-4-5-6-7 كون عددا من ثلاثة أرقام .

أ - كم من عدد زوجي يمكن تكوينه ؟

ب- كم من عدد قابل للقسمة على 5 يمكن تكوينه ؟

الحل

أ - qqp : $6\times6\times3$

ب - $qq5$: $6\times6\times1$

تمرين3

أ - كم يوجد من عدد مكون من 5 أرقام ؟

ب - من بين هذه الأعداد كم يوجد من عدد يحتوي على رقم زوجي على الأقل ؟

الحل

أ - 9×10^4

ب - عدد الأعداد الذي لا يحتوي على أي رقم زوجي : 5^5

عدد الأعداد الذي يحتوي على رقم زوجي على الأقل : $9\times10^4 - 5^5$

الاحتمال

تمرين4

يحتوي صندوق على 3 قطع نقدية

نسحب واحدة ثم نرميها ونسحب أخرى ثم نرميها

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الوجه F

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^1\times2\times C_2^1\times2 = 24$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الوجه F "

$\overline{A}$:"عدم ظهور الوجه F "

$card\,\overline{A} = C_3^1\times1\times C_2^1\times1 = 6$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 24 - 6 = 18$

$p(A) = \dfrac{18}{24}$

تمرين5

يحتوي صندوق على 3 نرود

نسحب واحدا ثم نرميه ونسحب آخر ثم نرميه

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^1\times6\times C_2^1\times6 = 216$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$:"عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = C_3^1\times5\times C_2^1\times5 = 150$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 216 - 150 = 66$

$p(A) = \dfrac{66}{216}$

تمرين6

نرمي نردين في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_6^1\times C_6^1 = 36$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$:"عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = 5\times5 = 25$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 36 - 25 = 11$

$p(A) = \dfrac{11}{36}$

تمرين7

يحتوي صندوق على 3 نرود

نختار تآنيا نردين ثم نرميهما في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^2\times6\times6 = 108$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$:"عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = C_3^2\times5\times5 = 75$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 108 - 75 = 33$

$p(A) = \dfrac{33}{108}$

تمرين8

يحتوي كيس على 10 بيدقات تحمل الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ ... ؛ 9

الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 مكتوبة بالأحمر
الأرقام : 5 ؛ 6 ؛ 7 مكتوبة بالأزرق
الأرقام : 8 ؛ 9 مكتوبة بالأصفر
حدد في كل حالة الاحتمال لتكون :
أ- الأرقام زوجية ؟
ب- الأرقام لها نفس اللون ؟
1- تآنيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تآنيا

$$card\,\Omega = C_{10}^{3} = 120$$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$$cardA = C_5^3 = 10$$

$$p(A) = \frac{10}{120}$$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$$cardB = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$$

$$p(B) = \frac{11}{120}$$

2- بالتتابع بدون إحلال

$$card\,\Omega = A_{10}^{3} = 720$$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$$cardA = A_5^3 = 60$$

$$p(A) = \frac{60}{720}$$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$$cardB = A_5^3 + A_3^3 = 60 + 6 = 66$$

$$p(B) = \frac{66}{720}$$

3- بالتتابع بإحلال

$$card\,\Omega = 10^3$$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$$cardA = 5^3$$

$$p(A) = \frac{5^3}{10^3} = \frac{1}{8}$$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$$cardB = 5^3 + 3^3 + 2^3 = 125 + 27 + 8 = 160$$

$$p(B) = \frac{160}{1000} = \frac{4}{25}$$

تمرين9

يحتوي كيس A على كرتين صفراوين و 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء و يحتوي كيس B على 4 كرات خضراء
نسحب تآنيا كرتين من الكيس A و نضعهما في الكيس B
ثم نسحب تآنيا كرتين من الكيس B
احسب احتمال الحصول على كرتين خضراوين بالضبط

الحل

$$card\,\Omega = C_{10}^{2} \times C_6^2 = 675$$

نعتبر الحدث C : " الحصول على كرتين خضراوين بالضبط "

$q = R \text{ ou } J$

C : $2q \text{ puis } 2V \text{ ou } q \text{ et } 1V \text{ puis } 2V \text{ ou } 2V \text{ puis } 2V$

$$cardC = C_7^2 \times C_4^2 + C_7^1 \times C_3^1 \times C_5^2 + C_3^2 \times C_6^2$$

$$cardC = 381$$

$$p(A) = \frac{381}{675}$$

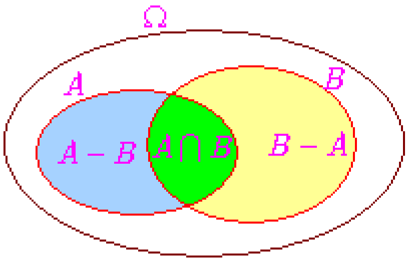
تمرين10

A و B حدثان بحيث :

$$P(A \cap B) = 1/6 ; P(B) = 1/4 ; P(A) = 1/3$$

احسب : $P_A(\overline{B}) ; P_A(B) ; P(\overline{A} \cup B) ; P(A \cup \overline{B}) ; P(A \cup B)$

الحل



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{12}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{6}}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$$

$$\boxed{P(A \cup \overline{B}) = \frac{11}{12}}$$

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}}$$

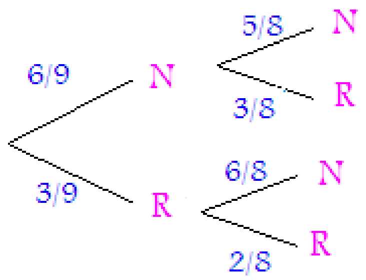
$$\boxed{P_A\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(A\right)} = \frac{1}{2}}$$

تمرين11

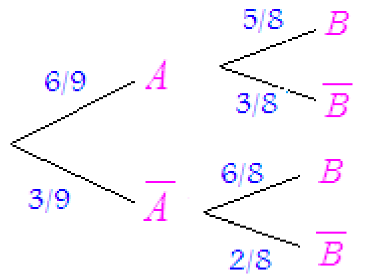
يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.
نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .
نعتبر : الحدث A : " الكرة الأولى سوداء "
الحدث B : " الكرة الثانية حمراء "
أ – حدد : $P\left(A\cap B\right);P\left(B\right);P\left(A\right)$
ب- هل A و B مستقلان ؟
ج- احسب : $P_B\left(A\right)$ ، $P\left(A\cup B\right)$ ، $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

الحل

الطريقة 1 : باستعمال شجرة الاحتمالات



أو



$$P\left(A\right) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P\left(B\right) = P\left(A\right)P_A\left(B\right) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}\left(B\right)$$

$$P\left(B\right) = \frac{6}{9}\times\frac{3}{8} + \frac{3}{9}\times\frac{2}{8} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(A\cap B\right) = P\left(A\right)P_A\left(B\right) = \frac{6}{9}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

الطريقة 2 : بدون استعمال شجرة الاحتمالات

أ – $card\Omega = 9\times 8 = 72$

الحدث A : NX (X سوداء أو حمراء)

$card\left(A\right) = 6\times 8 = 48$

$p\left(A\right) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$ **أو مباشرة** $\boxed{p\left(A\right) = \frac{2}{3}}$

الحدث B : NR أو RR

$card\left(B\right) = 3\times 2 + 6\times 3 = 24$

$p\left(B\right) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ **أو مباشرة**

$p\left(B\right) = \frac{3}{9}\times\frac{2}{8} + \frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$

إذن: $\boxed{p\left(B\right) = \frac{1}{3}}$

الحدث $A\cap B$ **: " الأولى سوداء و الثانية حمراء "**
NR

إذن: $P\left(A\cap B\right) = \frac{6\times 3}{9\times 8}$

و منه : $\boxed{P\left(A\cap B\right) = \frac{1}{4}}$

نعلم أن : $P_A\left(B\right) = \frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}$

إذن: $P_A\left(B\right) = \frac{3}{8}$

ب- A و B غير مستقلان

لأن : $P\left(A\cap B\right) \neq P\left(A\right)\times P\left(B\right)$

أو لأن : $p_A\left(B\right) \neq p\left(B\right)$

ج- نعلم أن : $P_B\left(A\right) = \frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(B\right)}$

إذن: $\boxed{P_B\left(A\right) = \frac{3}{4}}$

نعلم أن :

$$P\left(A\cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$$

إذن: $\boxed{P\left(A\cup B\right) = \frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P\left(\overline{A}\cap B\right) = P\left(B - A\right)$

و : $P\left(B - A\right) = P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$

إذن: $P\left(\overline{A}\cap B\right) = P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$

و منه : $\boxed{P\left(\overline{A}\cap B\right) = \frac{1}{12}}$

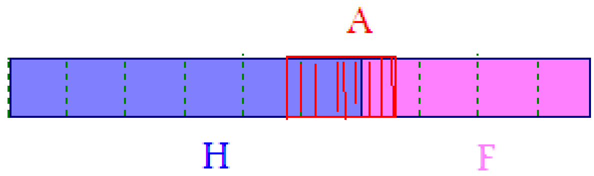
تمرين 12

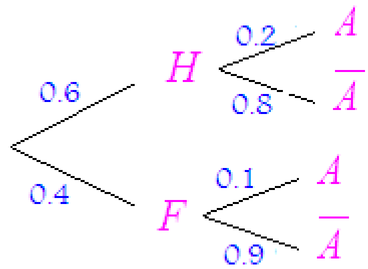
يتكون مجتمع من 60% من الرجال و 40% من النساء

20% من الرجال يتكلمون الأنجليزية و 10% من النساء يتكلمون الأنجليزية
اخترنا عشوائيا شخصا من هذا المجتمع
ما هو الاحتمال لكي يكون هذا الشخص
أ - رجلا و يتكلم الأنجليزية ؟
ب- رجلا و لا يتكلم الأنجليزية ؟
ج - امرأة و تتكلم الأنجليزية ؟
د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن يكون امرأة ؟

الحل

$A = (H \cap A) \cup (F \cap A)$ ، $(H \cap A) \cap (F \cap A) = \varnothing$





H : رجل $p(H) = 0.6$

F : امرأة $p(F) = 0.4$

A : أنجليزية

$P_H(A) = 0.2$ ، $P_F(A) = 0.1$

أ - رجل و يتكلم الأنجليزية : $p(A \cap H)$

$$p(A \cap H) = P_H(A) \times p(H) = 0.2 \times 0.6 = 0.12$$

$$\boxed{p(A \cap H) = 0.12}$$

ب- رجل و لا يتكلم الأنجليزية : $p(\overline{A} \cap H)$

$$p(\overline{A} \cap H) = P(H) - P(A \cap H) = 0.6 - 0.12$$

$$\boxed{p(\overline{A} \cap H) = 0.48}$$

أو : $p(\overline{A} \cap H) = P_H(\overline{A}) \times p(H) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

ج - امرأة و تتكلم الأنجليزية : $p(A \cap F)$

$$p(A \cap F) = P_F(A) \times p(F) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$$

$$\boxed{p(A \cap F) = 0.04}$$

د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن يكون امرأة ؟ : $P_A(F)$

$$p(A) = p(H)\,p_H(A) + p(F)\,p_F(A)$$

أو $p(A) = p(A \cap H) + p(A \cap F)$

$$\boxed{p(A) = 0.16}$$

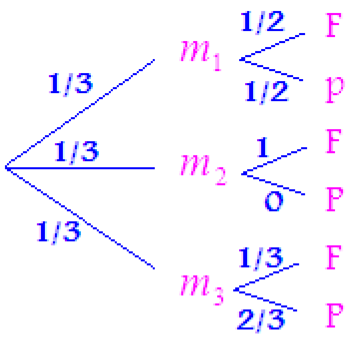
$$P_A(F) = \frac{p(A \cap F)}{p(A)} = \frac{0.04}{0.16}$$

$$\boxed{P_A(F) = 0.25}$$

تمرين13

يحتوي صندوق على قطعة نقدية m_1 غير مغشوشة و قطعة m_2 سجل على وجهيها F و قطعة m_3 بحيث احتمال الحصول على الوجه F هو $\frac{1}{3}$
نسحب عشوائيا قطعة من الصندوق ثم نرميها
1- احسب احتمال الحصول على الوجه F
2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون القطعة المسحوبة هي m_3

الحل



$$P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = \frac{1}{3}$$

$$P_{m_1}(F) = \frac{1}{2} \text{ ، } P_{m_2}(F) = 1 \text{ ، } P_{m_3}(F) = \frac{1}{3}$$

-1 $P(F) = P(m_1)P_{m_1}(F) + P(m_2)P_{m_2}(F) + P(m_3)P_{m_3}(F)$

$$P(F) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{P(F) = \frac{11}{18}}$$

2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون القطعة المسحوبة هي m_3 : $P_F(m_3)$

$$p_{m_3}(F)=\frac{p(m_3\cap F)}{p(m_3)}\Rightarrow p(m_3\cap F)=p_{m_3}(F)\,p(m_3)$$

$$\boxed{p(m_3\cap F)=\frac{1}{9}}$$

$$P_F(m_3)=\frac{p(m_3\cap F)}{p(F)}=\frac{1}{9}\times\frac{18}{11}$$

$$\boxed{P_F(m_3)=\frac{2}{11}}$$

تمرين14

يحتوي صندوق C_1 على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_2 على 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_3 على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء

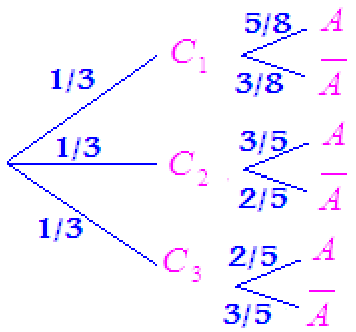
نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرتا

نفترض أن لجميع الصناديق و جميع الكرات نفس الاحتمال

1- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون من الصندوق C_2 ؟

الحل



نعتبر الحدث C_i: اختيار الصندوق C_i $\quad 1\le i\le 3$

$$1\le i\le 3\quad p(C_i)=\frac{1}{3}$$

1 - نعتبر الحدث A: الحصول على كرة بيضاء

$$p_{C_1}(A)=\frac{5}{8} \text{ و } p_{C_2}(A)=\frac{3}{5} \text{ و } p_{C_3}(A)=\frac{4}{10}$$

$$p(A)=p(C_1)p_{C_1}(A)+p(C_2)p_{C_2}(A)+p(C_3)p_{C_3}(A)$$

$$\boxed{p(A)=\frac{65}{120}}$$

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون من الصندوق C_2 : $P_A(C_2)$

$$p_{C_2}(A)=\frac{p(C_2\cap A)}{p(C_2)}\Rightarrow p(C_2\cap A)=p_{C_2}(A)\,p(C_2)$$

$$\boxed{p(C_2\cap A)=\frac{1}{5}}$$

$$P_A(C_2)=\frac{p(C_2\cap A)}{p(A)}=\frac{1}{5}\times\frac{120}{65}$$

$$\boxed{P_A(C_2)=\frac{24}{65}}$$

المتغيرات العشوائية

تمرين15

نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $card\Omega$ ؛ $X(\Omega)$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

4- حدد دالة التجزيئ ثم مثلها

الحل

1- $card\Omega=2^3=8$

$$\Omega=\{FFF;FFP;FPF;PFF;FPP;PFP;PPF;PPP\}$$

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

2- $(X=0)=\{FFF\}$ إذن : $P(X=0)=\dfrac{1}{8}$

$$(X=1)=\{FFP;FPF;PFF\}$$

إذن : $P(X=1)=\dfrac{3}{8}$

نجد : $P(X=2)=\dfrac{3}{8}$ ؛ $P(X=3)=\dfrac{1}{8}$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

3- $$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$

$$E(X)=\frac{3}{2}$$

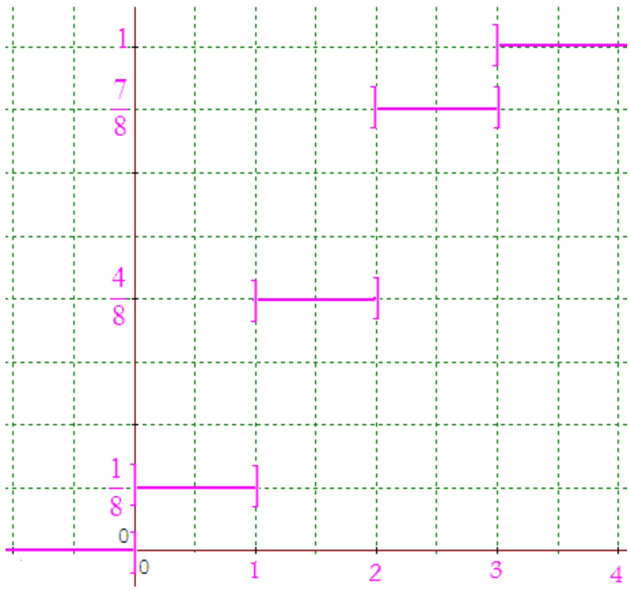
$$V(X)=\frac{1}{8}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+$$

$$\frac{3}{8}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(3-\frac{2}{3}\right)^2$$

$V(X)=\dfrac{3}{4}$ ؛ $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4- دالة التجزيئ F

$$\begin{cases} F(x)=0 & x\in\left]-\infty;0\right] \\ F(x)=\dfrac{1}{8} & x\in\left]0;1\right] \\ F(x)=\dfrac{4}{8} & x\in\left]1;2\right] \\ F(x)=\dfrac{7}{8} & x\in\left]2;3\right] \\ F(x)=1 & x\in\left]3;+\infty\right[\end{cases}$$



تمرين16

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 0 إلى 4

سحبنا في آن واحد كرتين من الكيس .

X : المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الرقمين المحصل عليهما .

1 - حدد قانون احتمال X

2- احسب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

3- حدد دالة التجزيئ ثم مثلها

الحل

-1 $card\Omega=C_5^2=10$

$X(\Omega)=\{1;2;3;4;5;6;7\}$

$X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

-2 حساب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

$$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{2}{10}+5\times\frac{2}{10}+6\times\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{10}$$

$$\boxed{E(X)=4}$$

$$V(X)=\frac{1}{10}\times(1-4)^2+\frac{1}{10}\times(2-4)^2+\frac{2}{10}\times(3-4)^2+\frac{2}{10}\times(4-4)^2+\frac{2}{10}\times(5-4)^2+\frac{1}{10}\times(6-4)^2+\frac{1}{10}\times(7-4)^2$$

$V(X)=3$ ؛ $\sigma(X)=\sqrt{3}$

3- دالة التجزيئ F

$$\begin{cases} F(x)=0 & x\in\left]-\infty;1\right] \\ F(x)=\dfrac{1}{10} & x\in\left]1;2\right] \\ F(x)=\dfrac{2}{10} & x\in\left]2;3\right] \\ F(x)=\dfrac{4}{10} & x\in\left]3;4\right] \\ F(x)=\dfrac{6}{10} & x\in\left]4;5\right] \\ F(x)=\dfrac{8}{10} & x\in\left]5;6\right] \\ F(x)=\dfrac{9}{10} & x\in\left]6;7\right] \\ F(x)=1 & x\in\left]7;+\infty\right[\end{cases}$$

تمرين17

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3 حمراء .

نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال

نعتبر الحدث B : " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "

احسب : $P(B)$

نعتبر : X : " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "

احسب : $P(X=6)$ ؛ $E(X)$ ؛ $V(X)$

الحل

مباشرة :

B هو : $C_8^6 bbbbbbqq$

q من بين : $R;N$ و عددهم : 15

$card\Omega=20^8$ ؛ $cardB=C_8^6 5^6 15^2$

$$P(B)=\frac{C_8^6 5^6 15^2}{20^8}$$

$$P(B)=C_8^6\left(\frac{5}{20}\right)^6\left(\frac{15}{20}\right)^2$$

باستعمال المتغير العشوائي الحداني

الاختبار هو سحب كرة واحدة .

يعاد الاختبار $n = 8$ مرة .

A : " الحصول على كرة بيضاء "

B : " وقوع A $k = 6$ مرة "

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n = 8$ و $p = \frac{1}{4}$

إذن : $E(X) = 8 \times \frac{1}{4}$

$$V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

تمرين 18

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء.

نسحب من الصندوق 5 كرات .

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "

الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1- حدد : $X(\Omega)$

2- احسب : $cardA$ $p(X = 2)$ في كل حالة :

أ- تآنيا ب - بالتتابع بإحلال ج - بالتتابع بدون إحلال

الحل

-1 $X(\Omega) = \{0;1;2;3;4;5\}$

-2

أ- السحب تآنيا : $\boxed{card\Omega = C_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A} = C_6^5$

إذن: $\boxed{cardA = C_{11}^5 - C_6^5}$

$$\boxed{p(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_6^3}{C_{11}^5}}$$

ب - السحب بالتتابع بإحلال : $\boxed{card\Omega = 11^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A} = 6^5$

إذن: $\boxed{cardA = 11^5 - 6^5}$

$$\boxed{p(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{5}{11}\right)^2 \left(\frac{6}{11}\right)^3}$$

أو : $\boxed{p(X = 2) = C_5^2 \frac{5^2 6^3}{11^5}}$

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال : $\boxed{card\Omega = A_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A} = A_6^5$

إذن: $\boxed{cardA = A_{11}^5 - A_6^5}$

$$\boxed{p(X = 2) = C_5^2 \frac{A_5^2 A_6^3}{A_{11}^5}}$$

تمرين 19

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 20

يحتوي كيس على 10 كرة بيضاء و $n-10$ كرة سوداء

نسحب كرة من الكيس نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس

نكرر التجربة n مرة

p_K هو احتمال الحصول على k كرة بيضاء $0 \le k \le n$

1- احسب : p_K بدلالة n و k

2- نضع : $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$ $0 \le k \le n-1$

أ- بين أن : $u_k = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{10}{n-10}$

ب- بين أن : $0 \le k \le 9 \Leftrightarrow u_k \ge 1$

$10 \le k \le n-1 \Leftrightarrow u_k \le 1$

ج- استنتج اكبر قيمة M للعدد p_K $0 \le k \le n$

و بين أن : $M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

الحل

-1 $p_K = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

-2 $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$ $0 \le k \le n-1$

أ- $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$ $\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1}$

$$u_k=\frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-(k+1)}}{C_n^{k}\left(\frac{10}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}}$$

$$\boxed{u_k=\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}}$$

ب- نبين أن : $0\le k\le 9\Leftrightarrow u_k\ge 1$

$$u_k\ge 1\Leftrightarrow k\le\frac{10}{n}+9$$

بما أن : $n\ge 20$ فإن : $\frac{10}{n}\le\frac{1}{2}$

$$u_k\ge 1\Leftrightarrow k\le\frac{10}{n}+9\Leftrightarrow k\le\frac{1}{2}+9$$

بما أن : $k\in\mathbb{N}$ فإن : $u_k\ge 1\Leftrightarrow 0\le k\le 9$

$$\boxed{0\le k\le 9\Leftrightarrow u_k\ge 1}$$

- نبين أن : $10\le k\le n-1\Leftrightarrow u_k\le 1$

بنفس الطريقة

$$u_k\le 1\Leftrightarrow k\ge\frac{1}{2}+9$$

بما أن : $k\in\mathbb{N}$ و $k\le n-1$

فإن : $u_k\le 1\Leftrightarrow n-1\ge k\ge 10$

$$\boxed{10\le k\le n-1\Leftrightarrow u_k\le 1}$$

ج- بما أن : $0\le k\le 9\Leftrightarrow u_k\ge 1$

فإن : $0\le k\le 9\Leftrightarrow p_{k+1}\ge p_k$

$$p_{10}\ge p_9\ge\cdots\ge p_0$$

بما أن : $10\le k\le n-1\Leftrightarrow u_k\le 1$

فإن : $10\le k\le n-1\Leftrightarrow p_k\ge p_{k+1}$

$$p_{10}\ge p_{11}\ge\cdots\ge p_n$$

اكبر قيمة M للعدد p_K $0\le k\le n$ هي p_{10}

$$\boxed{M=C_n^{10}\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10}}$$

$$M=\frac{n!}{(n-10)!10!}\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10}$$

$$\boxed{M=\frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}}$$

تمرين 20

نوزع 3 كرات مرقمة من 1 إلى 3 على 5 صناديق $E;D;C;B;A$ كل صندوق يمكن أن يحتوي على 3 كرات

X : المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الصناديق المملوءة

حدد قانون احتمال X

الحل

$$card(\Omega)=5^3=125$$

- $3-0-0-0-0\ :\ X=1$

$$card(X=1)=C_5^1=5$$

$$\boxed{p(X=1)=\frac{5}{125}=\frac{1}{25}}$$

- $2-1-0-0-0\ :\ X=2$

$$card(X=2)=C_3^2\times C_5^1\times C_1^1\times C_4^1=60$$

$$\boxed{p(X=2)=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}}$$

- $1-1-1-0-0\ :\ X=3$

$$card(X=3)=C_3^3\times C_5^3\times A_3^3=60$$

$$\boxed{p(X=3)=\frac{12}{25}}$$

$X(\Omega)$	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/25	12/25	12/25

تمرين 21

X متغير عشوائي بحيث : $x(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

F دالة تجزيء X بحيث : $\lim_{x\to1^-}F(x)=\frac{1}{35}$

$$F(3)-F(1)=\frac{6}{7}\ ;\ F(2)=\frac{13}{35}$$

1 - حدد قانون احتمال X

2- حدد F دالة التجزيء

الحل

1- نعتبر : $p_i=p(X=i)$

نعلم أن : $F(x)=p_0\quad x\in]0;1[$

إذن : $\lim_{x\to1^-}F(x)=p_0$

بما أن : $\lim_{x\to1^-}F(x)=\frac{1}{35}$ فإن : $\boxed{p_0=\frac{1}{35}}$

$$F(3)-F(1)=(p_0+p_1+p_2)-p_0=p_1+p_2$$

بما أن : $F(3)-F(1)=\frac{6}{7}$ فإن : $\boxed{p_1+p_2=\frac{6}{7}}$

$$F(2)=p_0+p_1$$

بما أن : $F(2)=\dfrac{13}{35}$ فإن : $\boxed{p_0+p_1=\dfrac{13}{35}}$

و لدينا حسب قانون الاحتمال :

$$\boxed{p_0+p_1+p_2+p_3=1}$$

نجد :

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

-2

$$\begin{cases} F(x)=0 & x\in\left]-\infty;0\right] \\ F(x)=\dfrac{1}{35} & x\in\left]0;1\right] \\ F(x)=\dfrac{13}{35} & x\in\left]1;2\right] \\ F(x)=\dfrac{31}{35} & x\in\left]2;3\right] \\ F(x)=1 & x\in\left]3;+\infty\right[\end{cases}$$

تمرين 22

نوزع n قرص مرقمة من 1 إلى n على m صندوق $A_1;\cdots;A_m$ كل صندوق يمكن أن يحتوي على n قراص

X : المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الصناديق المملوءة.

في كل حالة حدد قانون احتمال X

-1 $m=2\ ;\ n=4$ -2 $m=3;\ n=5$

-3 $m=4\ ;\ n=5$ -4 $m=2\ ;\ n=6$

-5 $m=3\ ;\ n=6$ -6 $m=4\ ;\ n=8$

الحل

-1 $m=2\ ;\ n=4$ $card(\Omega)=2^4=16$

$$\left.\begin{array}{ll} 4-0\rightarrow 2 & =2 \\ 3-1\rightarrow C_4^3\times 2 & =8 \\ 2-2\rightarrow C_4^2 & =6 \end{array}\right\}=16$$

-2 $m=3;\ n=5$ $card(\Omega)=3^5=243$

$$\left.\begin{array}{ll} 5-0-0\rightarrow 3 & =3 \\ 4-1-0\rightarrow C_5^4\times 3\times 2 & =30 \\ 3-2-0\rightarrow C_5^3\times 3\times 2 & =60 \\ 3-1-1\rightarrow C_5^3\times 3\times 2! & =60 \\ 2-2-1\rightarrow C_5^1\times 3\times C_4^2 & =90 \end{array}\right\}=243$$

-3 $m=4\ ;\ n=5$ $card(\Omega)=4^5=1024$

$$\left.\begin{array}{ll} 5-0-0-0\rightarrow 4 & =4 \\ 4-1-0-0\rightarrow C_5^4\times 4\times 3 & =60 \\ 3-2-0-0\rightarrow C_5^3\times 4\times 3 & =120 \\ 3-1-1-0\rightarrow C_5^3\times 4\times C_3^2\times 2! & =240 \\ 2-2-1-0\rightarrow C_5^1\times 4\times C_3^2\times C_4^2 & =360 \\ 2-1-1-1\rightarrow C_5^5\times 4\times 3! & =240 \end{array}\right\}=1024$$

-4 $m=2\ ;\ n=6$ $card(\Omega)=2^6=64$

$$\left.\begin{array}{ll} 6-0\rightarrow 2 & =2 \\ 5-1\rightarrow C_6^5\times 2 & =12 \\ 4-2\rightarrow C_6^4\times 2 & =30 \\ 3-3\rightarrow C_6^3 & =20 \end{array}\right\}=64$$

-5 $m=3\ ;\ n=6$ $card(\Omega)=3^6=729$

$$\left.\begin{array}{ll} 6-0-0\rightarrow 3 & =3 \\ 5-1-0\rightarrow C_6^5\times 3\times 2 & =36 \\ 4-2-0\rightarrow C_6^4\times 3\times 2 & =90 \\ 4-1-1\rightarrow C_6^4\times 3\times 2! & =90 \\ 3-2-1\rightarrow C_6^3\times 3\times C_3^2\times 2 & =360 \\ 3-3-0\rightarrow C_3^2\times C_6^3 & =60 \\ 2-2-2\rightarrow C_6^2\times C_4^2 & =90 \end{array}\right\}=729$$

-6 $m=4\ ;\ n=8$ $card(\Omega)=4^8=65536$

$$\left.\begin{array}{ll} 8-0-0-0\rightarrow 4 & =4 \\ 7-1-0-0\rightarrow C_8^7\times 4\times 3 & =96 \\ 6-2-0-0\rightarrow C_8^6\times 4\times 3 & =336 \\ 6-1-1-0\rightarrow C_8^6\times 4\times C_3^2\times 2! & =672 \\ 5-3-0-0\rightarrow C_8^5\times 4\times 3 & =672 \\ 5-2-1-0\rightarrow C_8^5\times 4\times C_3^2\times 3\times 2 & =4032 \\ 5-1-1-1\rightarrow C_8^5\times 4\times 3! & =1344 \\ 4-4-0-0\rightarrow C_4^2\times C_8^4 & =420 \\ 4-3-1-0\rightarrow C_8^4\times 4\times C_4^3\times 3\times 2 & =6720 \\ 4-2-2-0\rightarrow C_8^4\times 4\times C_3^2\times C_4^2 & =5040 \\ 4-2-1-1\rightarrow C_8^4\times 4\times C_4^2\times 3\times 2! & =10080 \\ 3-3-2-0\rightarrow C_8^2\times 4\times C_3^2\times C_6^3 & =6720 \\ 3-3-1-1\rightarrow C_4^2\times C_8^2\times 2!\times C_6^3 & =6720 \\ 3-2-2-1\rightarrow C_8^3\times 4\times C_5^1\times 3\times C_4^2 & =20160 \\ 2-2-2-2\rightarrow C_8^2\times C_6^2\times C_4^2 & =2520 \end{array}\right\}=65536$$

ملاحظة

عدد الكيفيات لتوزيع pn قرص على p خانة بحيث كل خانة تحتوي على n قرص بالضبط

$$\underbrace{n-n-\cdots-n-n}_{p\ fois} \to C_{pn}^{n}\times C_{(p-1)n}^{n}\times\cdots\times C_{2n}^{n}$$

أمثلة :

- توزيع 4 أقراص على 2 خانة بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقراص بالضبط

$$2-2 \to C_4^2 = 6$$

$$\left.\begin{matrix} 12-34 \\ 13-24 \\ 14-23 \end{matrix}\right\} \times 2 = \frac{C_4^2}{2}\times 2$$

- توزيع 6 أقراص على 2 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 3 أقراص بالضبط

$$3-3 \to C_6^3 = 20$$

$$\left.\begin{matrix} 123-456 \\ 124-356 \\ 125-346 \\ 126-345 \\ 134-256 \\ 135-246 \\ 136-245 \\ 145-236 \\ 146-235 \\ 156-124 \end{matrix}\right\} \times 2 = \frac{C_6^3}{2}\times 2$$

- توزيع 6 أقراص على 3 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقراص بالضبط

$$2-2-2 \to C_6^2\times C_4^2 = 90$$

$$\left.\begin{matrix} 12-34-56 \\ 13-26-45 \\ 14-25-36 \\ 15-24-36 \\ 16-23-45 \end{matrix}\right\} \frac{C_6^2}{3}\times 3!+ \quad \left.\begin{matrix} 12-36-45 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \frac{C_6^2}{3}\times 3!+ \quad \left.\begin{matrix} 12-35-46 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \frac{C_6^2}{3}\times 3!$$

- توزيع 8 أقراص على 4 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقراص بالضبط

$$2-2-2-2 \to C_8^2\times C_6^2\times C_4^2 = 2520$$

- توزيع 8 أقراص على 2 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 4 أقراص بالضبط

$$4-4 \to C_8^4 = 70$$

تمرين 23

نرمي نردا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 بحيث احتمالات ظهور وجوهه متناسبة مع الأرقام التي تحملها

1- احسب احتمال ظهور كل وجه

2- احسب احتمال ظهور رقم فردي

الحل

-1 $P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6}$

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 1$$

إذن :

$$P(1)+2P(1)+3P(1)+4P(1)+5P(1)+6P(1) = 1$$

$$P(1) = \frac{1}{21}; P(2) = \frac{2}{21}; P(3) = \frac{3}{21}$$

$$P(4) = \frac{4}{21}; P(5) = \frac{5}{21}; P(6) = \frac{6}{21}$$

-2 الحدث A : ظهور رقم فردي

$$P(A) = P(1)+P(3)+P(5)$$

$$\boxed{P(A) = \frac{9}{21}}$$